写给数学家的理论力学

孙天阳

目录

Chapter 1

Chapter 2

耗散系统

非保守力的功率小于等于 0 时，称为耗散力.

Chapter 3

变分法

1 Legendre 变换

Chapter 4

变分法与最小作用量原理

1 泛函与变分

1.1 泛函的概念

- 定义域是什么？
- 先搞懂单变量泛函，之后可考虑多变量泛函
- 好吧，暂时不接受所谓可动边界泛函的极值，反正下周三才讲呢

1.2 泛函的连续性

只是我连研究什么空间都没有搞清楚，又怎么谈空间上的拓扑呢？

1.3 变分（切映射，或者弱一点，方向导数）

$$\delta\Phi[f][\delta f] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Phi(f+\varepsilon\delta f)$$

- 要想谈切映射，至少说 Φ 得在 f 的一个邻域内有定义，还是这个尴尬的情况，我不知道空间是什么，也不知道空间上的拓扑.
- 要想谈沿某一方向 δf 的方向导数，要求要低一点，我只需要 Φ 在沿以 δf 为切向量的曲线上有定义就可以了
- 但还是很奇怪啊，我不知道空间是什么，我怎么讨论到这个空间的曲线是什么，又该怎么讨论曲线的切向量呢？
- 怪不得数学课上来都是先明确我们研究的是什么对象，不明确真是寸步难行.
- 不同的泛函肯定定义域也不一样，需得具体情况具体分析，现在是把哪些操作需要用到空间的哪些信息先想清楚了.

2 不动边界的泛函极值

2.1 最速降线

2.2 不动边界的积分型泛函驻值

只要这个问题是不动边界非固定边值的极值问题，极值点的必要条件是欧拉方程与自然边界条件。

2.3 Euler 方程的首次积分

2.4 多宗量泛函的固定边界驻值

2.5 多重积分型泛函的固定边界驻值

2.6 含高阶导数泛函的固定边界驻值

3 泛函的条件极值

3.1 悬链线

3.2 水银滴的表面形状

3.3 等周问题

3.4 不独立宗量的泛函极值

4 可动边界的泛函极值

4.1 可动边界的变分

4.2 有约束的可动边界

4.3 有角点的致极曲线

5 微分方程与泛函极值

6 泛函驻值的数值解法

- 前几天悟到一个极值的必要条件，定义在空间上的函数在某点处取极值的必要条件是该函数复合上经过该点的任意曲线后得到的单实变量函数在该点处取极值.

比如考虑经典的积分型泛函

$$\Phi[f] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f, f')\mathrm{d}x$$

$$\delta\Phi[f][\delta f] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\delta f\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F}{\partial f'}\delta f\right)\bigg|_{x_1}^{x_2}$$

7 全变分

- $$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} F(x(\varepsilon),\varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(0),0)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(x(0),0)$$

- $$\Delta F = F'\Delta x + \delta F$$

- $$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} F(x,\varepsilon)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)F(x_2,0) - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)F(x_1,0) + \int_{x_1(0)}^{x_2(0)} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(x,0)\mathrm{d}x$$

- $$\Delta \int_{x_1}^{x_2} F\mathrm{d}x = F\Delta x\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta F\mathrm{d}x.$$

Chapter 5

对称变换与守恒量

1 时空坐标的连续变换

2 对称变换和准对称变换

$$
\begin{aligned}
S(\lambda_0) &= \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t))\mathrm{d}t \\
S(\lambda) &= \int_{t_1'(\lambda)}^{t_2'(\lambda)} L(t', q'(t'), \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t'}(t'))\mathrm{d}t' \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L(t'(t,\lambda), q'(q(t'(t,\lambda)),\lambda), \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}(t'(t,\lambda)))\frac{dt'}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

例 2.1. 设拉格朗日函数为 $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{x^2}$，考虑尺度变换

$$t'=\lambda^2 t,\quad x'=\lambda x.$$

求证尺度变换是对称变换.

证明.

$$\begin{aligned}
S&=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2-\frac{1}{(x(t))^2}\mathrm{d}t\\
S(\lambda)&=\int_{t_1'}^{t_2'}\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}(t')\right)^2-\frac{1}{(x'(t'))^2}\mathrm{d}t'\\
&=\int_{t_1'}^{t_2'}\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}(x\left(\frac{t'}{\lambda^2}\right))\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t'}{\lambda^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}(t')\right)^2-\frac{1}{(\lambda x(t'))^2}\mathrm{d}t'\\
&=\int_{t_1'}^{t_2'}\frac{1}{2}m\left(\lambda\cdot\dot{x}\left(\frac{t'}{\lambda^2}\right)\cdot\frac{1}{\lambda^2}\right)^2-\frac{1}{(\lambda x(t'))^2}\mathrm{d}t'\\
&=\frac{1}{\lambda^2}\int_{t_1'}^{t_2'}\frac{1}{2}m(\dot{x}\left(\frac{t'}{\lambda^2}\right))^2-\frac{1}{(x(t'))^2}\mathrm{d}t'\\
&\xlongequal{t'=\lambda^2 t}\frac{1}{\lambda^2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2-\frac{1}{(x(\lambda^2 t))^2}\lambda^2\mathrm{d}t\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2-\frac{1}{(x(\lambda^2 t))^2}\mathrm{d}t\neq S
\end{aligned}$$

□

证明. 已知 $L(t,x,\dot{x})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{x^2}$，引进参数 τ，考虑

$$\tilde{L}(q_0,\dot{q}_0,q_1,\dot{q}_1)=\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_0}\right)^2-\frac{1}{(q_1)^2}.$$

尺度变换此时写为

$$q_0'=\lambda^2 q_0,\quad q_1'=\lambda q_1.$$

则

$$\begin{aligned}
\tilde{S}&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_0}\right)^2-\frac{1}{(q_1)^2}\mathrm{d}\tau\\
\tilde{S}(\lambda)&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{q}_1'}{\dot{q}_0'}\right)^2-\frac{1}{(q_1')^2}\mathrm{d}\tau\\
&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{1}{2}m\left(\frac{\lambda\dot{q}_1}{\lambda^2\dot{q}_0}\right)^2-\frac{1}{(\lambda q_1)^2}\mathrm{d}\tau\\
&=\frac{1}{\lambda^2}\tilde{S}\neq S.
\end{aligned}$$

□

Chapter 6

伽利略-牛顿时空的物理模型

1 title

Chapter 7

闵氏时空的物理模型

下面我们来寻找满足相对论协变性的单粒子的拉格朗日函数.

- 什么是相对论协变性?

1 狭义相对论与 Minkowski 时空

- 自然单位制
- 时空坐标
- 度规张量
- 逆变矢量
- 固有时

2 庞加莱变换

- 恰当瞬时洛伦兹变换
- 六个参数：空间转动三个，洛伦兹推动三个
- 快度 https://en.wikipedia.org/wiki/Rapidity
- 相对论因子 https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz factor
- 被动变换，主动变换

3 相对论单粒子模型

Chapter 8

微振动

为什么要研究微振动：

- 谐振子模型的推广
- 典型的线性系统

1 微振动系统的运动方程

考虑稳定保守系统，设其拉氏量为 $L = T - V$.

因为它是稳定系统，所以 T 只与速度的二次项有关，$T = \dfrac{1}{2}T_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$.

但我其实没想清楚 $T_{\alpha\beta}$ 和 V 只依赖于 q 是与哪条假设有关.

由达朗贝尔原理，系统在稳定平衡位置 $q = q_0$ 处满足

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right|_{q=q_0} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n.$$

若系统在平衡位置附近作微振动，可将 $V(q)$ 在平衡点附近作级数展开，由于常数项没有动力学效应，舍去常数项；一阶项为零；舍去三阶及更高阶无穷小量，

$$V(\eta) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\eta_\alpha\eta_\beta, \quad \eta_\alpha := q_\alpha - q_{0\alpha}.$$

至于动能项，我没太想清楚为什么能把位移和速度视作同阶无穷小量，但我也不是很 care 这件事情，在承认这点的基础上，

$$T = \frac{1}{2}M_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta = \frac{1}{2}\left\{M_{\alpha\beta}(q_0) + \left.\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma}\right|_{q=a_0}\eta_\gamma + \cdots\right\}\dot{\eta}_\alpha\dot{\eta}_\beta = \frac{1}{2}M_{\alpha\beta}\dot{\eta}_\alpha\dot{\eta}_\beta.$$

所以

$$L = \frac{1}{2}M_{\alpha\beta}\dot{\eta}_\alpha\dot{\eta}_\beta - \frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T M\dot{\eta} - \eta^T M\eta,$$

可以类比谐振子

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

运动方程为

$$M\ddot{\eta} + K\eta = 0.$$

2 简正模式

希望通过线性变换 $\eta = A\xi$ 消除掉耦合.

让我们展望下未来，假设存在这样一个 A，使得拉氏量变为

$$L = \frac{1}{2}\xi^T\xi - \frac{1}{2}\xi^T\Omega\xi, \quad \Omega = diag(\omega_1^2, \cdots, \omega_n^2),$$

此时运动方程变为

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2\xi_j = 0 \Longrightarrow \xi_j = c_j\cos(\omega_j t - \varphi_j), \quad j = 1, \cdots, n.$$

让我们稍微混用下记号，将 $\cos(\omega_j t - \varphi_j)$ 重新记作 ξ_j，此时

$$\eta = c_1\vec{a}_1\xi_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n\xi_n,$$

因此 η 可视为特解 $\vec{a}_1\xi_1, \cdots, \vec{a}_n\xi_n$ 的线性组合，每个特解都反映了一个特殊的振动模式，主要由 $\vec{a}_i$ 来反映. 比如例子中的 $\vec{a} = (1,1)^T$ 就代表两个质点同向相同幅度运动，$\vec{a} = (1,-2,1)^T$ 就代表一三向左走的时候二向右走.